A desigualdade de Jensen

Emanuel Carneiro - emanuelc@baydenet.com.br

25 de março de 2004

1 Preliminares de Cálculo

Conheceremos neste capítulo uma das mais poderosas armas para o combate aos problemas de olimpíada: a desigualdade de Jensen. Para compreender esta desigualdade e saber caracterizar suas hipóteses o leitor precisará de um prévio conhecimento de cálculo. Apenas algumas noções topológicas (conjuntos abertos, fechados, compactos, ...), funções contínuas, limites e derivadas. Principalmente saber derivar qualquer função dada, e para isso é necessário treino exaustivo da regra da cadeia. É a derivação que vai nos indicar quando e como usar a desigualdade de Jensen. Se você não sabe nada de cálculo, não se desespere, peça a um amigo para lhe dar umas dicas básicas e tente ler as próximas páginas. Garanto que o seu esforço será recompensado.
Seja $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Um ponto $t \in (a, b)$ é dito ser um máximo local de f (resp. mínimo local de f) se $f(t) \geq f(x)$ (resp. $f(t) \leq f(x)$) para qualquer x em um intervalo aberto contendo t.

Um ponto t é dito ser um extremo local de f se é um ponto de máximo ou mínimo local. Podemos encontrar os extremos de f pela caracterização abaixo:

Proposição 1. *Se t é um extremo local de f, então $f'(t) = 0$.*

Podemos também lembrar como a primeira derivada pode nos dar informações sobre a função f.

Proposição 2. *Examinando o sinal de $f'(x)$ podemos dizer que:*

(i) $f'(x) > 0$ *em* $(a, b) \iff f$ *é crescente em* (a, b)*;*

(ii) $f'(x) \geq 0$ *em* $(a, b) \iff f$ *é não-decrescente em* (a, b)*;*

(iii) $f'(x) < 0$ *em* $(a, b) \iff f$ *é decrescente em* (a, b)*;*

(iv) $f'(x) \leq 0$ *em* $(a, b) \iff f$ *é não-crescente em* (a, b)*;*

Acho que agora estamos aptos a conhecer a desigualdade de Jensen. No capítulo Aplicações do cálculo às desigualdades apresentaremos outras formas de usar as técnicas do cálculo para abordar desigualdades.

2 A desigualdade de Jensen

Segue abaixo a versão mais simples e mais utilizada desta desigualdade.

Teorema 1 (Desigualdade de Jensen). *Seja $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Se $f''(x) \geq 0$ (função convexa) em todo o intervalo (a, b) então, para quaisquer $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b)$ vale:*

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)$$

Se, por outro lado, $f''(x) \leq 0$ (função côncava) em todo o intervalo (a, b), valerá:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)$$

Prova: Vamos fazer a prova para o primeiro caso, onde $f'' \geq 0$. A demosntração para o segundo caso é análoga e será deixada como exercício.

A prova será por indução sobre n. O caso $n = 1$ não oferece resistência. Suponha então que a desigualdade valha para quaisquer $n - 1$ reais no intervalo (a, b). Façamos então o passo indutivo para n. Inicialmente fixe $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ e chame $x_n = x$. Façamos $x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = l$ e $f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) = k$. Queremos provar que:

$$\frac{k + f(x)}{n} \geq f\left(\frac{l + x}{n}\right) \quad \text{para qualquer} \quad x \in (a, b)$$

Defina então a função:

$$g(x) = \frac{k + f(x)}{n} - f\left(\frac{l + x}{n}\right)$$

Derivando obtemos:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{n} - \frac{1}{n} f'\left(\frac{l + x}{n}\right)$$

Se $x = \frac{l+x}{n} \Rightarrow x = \frac{l}{n-1}$ teremos $g'(x) = 0$. Usando agora que f' é não-decrescente em (a, b) (lembre-se que estamos supondo $f'' > 0$) podemos inferir que se $x < \frac{l}{n-1}$ teremos $g'(x) \leq 0$ e se $x > \frac{l}{n-1}$ teremos $g'(x) \geq 0$. Usando nossos conhecimentos de cálculo, concluímos que $x = \frac{l}{n-1}$ é um ponto de mínimo global para $g(x)$ no intervalo (a, b). Daí segue que:

$$g(x) \geq g\left(\frac{l}{n-1}\right) = \frac{k}{n} - \frac{(n-1) f\left(\frac{l}{n-1}\right)}{n} \geq 0$$

pois:

$$\frac{k}{n-1} \geq f\left(\frac{l}{n-1}\right)$$

por hipótese de indução. As condições de igualdade dependem da função f. No caso mais comum temos $f'' > 0$ estritamente no intervalo a, b. Nesse caso, pela demostração acima podemos concluir que a igualdade só ocorrerá

se $x_1 = x_2 = ... = x_n$. ■

Obs: Podemos aplicar a desigualdade de Jensen também em intervalos infinitos, desde que estes sejam abertos e que a função f seja convexa ou côncava em todo o intervalo.

Teorema 2 (Desigualdade de Jensen - generalizada). *Seja $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Sejam $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b)$ e $a_1, a_2, ..., a_n$ reais quaisquer cuja soma é 1. Se $f'' \geq 0$ em (a, b) temos:*

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + ... + a_n f(x_n) \geq f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n)$$

Se, por outro lado, tivermos $f'' \leq 0$ em (a, b) a desigualdade mudará de sinal:

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + ... + a_n f(x_n) \leq f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n)$$

Prova: A demonstração da generalização segue as mesmas idéias da prova apresentada acima e é deixada como exercício. ■

Volto a salientar que, na maioria dos casos, usaremos a desiguladade em sua versão mais simples, como veremos a seguir nos exercícios.

3 Exercícios Resolvidos

Exemplo 3.1 (Índia/95). *Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ reais positivos cuja soma é 1. Prove que:*

$$\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1 - x_2}} + ... + \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n - 1}}$$

Solução: Olhe para a função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ definida no intervalo $(0, 1)$. Derivando-a duas vezes obtemos:

$$f''(x) = (1 - x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3x}{4}(1 - x)^{-\frac{5}{2}} \geq 0$$

Logo, sendo f convexa no intervalo $(0, 1)$, podemos aplicar a desigualdade de Jensen:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)$$

Temos portanto que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq n.f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{n - 1}}$$

Sentiram o poder? ■

4 Exercícios Propostos

Problema 1
Sejam a, b, c reais positivos tais que $a+b+c=1$. Calcule o mínimo valor para:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{10}+\left(b+\frac{1}{b}\right)^{10}+\left(c+\frac{1}{c}\right)^{10}$$

Problema 2
Sejam α, β, γ os ângulos de um triângulo. Prove que:

(i) $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\cos A+\cos B+\cos C \leq \frac{3}{2}$

(iii) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}.\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$

(iv) $\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma \geq \sqrt{3}$

Cuidado: Nem todas as funções acima são côncavas ou convexas em todo o domínio.

Problema 3
Derive a desigualdade $MA \geq MG$:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$$

onde os a_i são reais não-negativos, a partir da desigualdade de Jensen.

Problema 4
(USAMO/74) Sejam a, b, c reais positivos, prove que:

$$a^ab^bc^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

Problema 5
(Banco IMO/00) Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ reais positivos tais que $a_1+a_2+...+a_n<1$. Prove que:

$$\frac{a_1a_2...a_n[1-(a_1+a_2+...+a_n)]}{(a_1+a_2+...+a_n)(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}$$

Problema 6
Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ reais positivos, cada um dos quais é maior ou igual a 1. Prove que:

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+...+\frac{1}{a_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+1}$$

Problema 7
Se f é uma função convexa e x_1, x_2, x_3 estão no domínio de f, então:

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \geq \frac{4}{3}\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)\right]$$

Problema 8
(Vietnã/98) Sejam $n \geq 2$ e $x_1, x_2, ..., x_n$ reais positivos que satisfazem:

$$\frac{1}{x_1 + 1998} + \frac{1}{x_2 + 1998} + ... + \frac{1}{x_n + 1998} = \frac{1}{1998}$$

Prove que:

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}}{n-1} \geq 1998$$

Obs: Novamente, cuidado com a não-convexidade em todo o domínio.

Problema 9
(IMO/01) Prove que, para quaisquer reais positivos a, b, c temos:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$