Questão 01 [1,25]

Determine um número inteiro entre 1200 e 1400 que deixa restos 2 e 6 quando dividido, respectivamente, por 11 e 13.

Solução:

$$\begin{cases} X \equiv 2 \; mod \; 11 \\ X \equiv 6 \; mod \; 13 \end{cases}$$

Vamos resolver pelo Teorema Chinês dos Restos:

$$c_1 = 2, \qquad c_2 = 6, \qquad M = 11 \cdot 13 = 143, \qquad M_1 = 13, \qquad M_2 = 11$$

$$\begin{cases} 13Y \equiv 1 \; mod \; 11 \\ 11Y \equiv 1 \; mod \; 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 6 \end{cases}$$

Assim,

$$X \equiv M_1 y_1 c_1 + M_2 y_2 c_2 \equiv 13 \cdot 6 \cdot 2 + 11 \cdot 6 \cdot 6 \equiv 156 + 396 \equiv 13 + 110 \equiv 123 \; mod \; 143$$

Logo,

$$x = 143k + 123 \Rightarrow 1200 < 143k + 123 < 1400 \Rightarrow 1077 < 143k < 1277 \Rightarrow k = 8$$

Portanto, o único número inteiro que satisfaz o enunciado é:

$$x = 143 \cdot 8 + 123 \Rightarrow x = 1267$$

Questão 02 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,50; (c)=0,25]

Para cada sentença abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Existe um número real x tal que $5x + 7 < 2 - x < 7x + 8$.

(b) Se x é um número real tal que $x > 3$, então $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$.

(c) Para todo número real x, tem-se que $x < 1 \Longrightarrow x^2 < 1$.

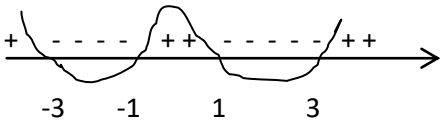
Solução:

(a)

$$5x + 7 < 2 - x < 7x + 8 \Rightarrow \begin{cases} 6x < -5 \\ 8x > -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{5}{6} \\ x > -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{4} < x < -\frac{5}{6}, \ \ mas -\frac{3}{4} > -\frac{5}{6} \qquad (F)$$

(b)

$$x > 3 \Rightarrow \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} \geq 0 \Leftrightarrow x > 3 \Rightarrow \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow x > 3 \Rightarrow (x \leq -3) \vee (-1 \leq x < 1) \vee (x > 3) \qquad (V)$$

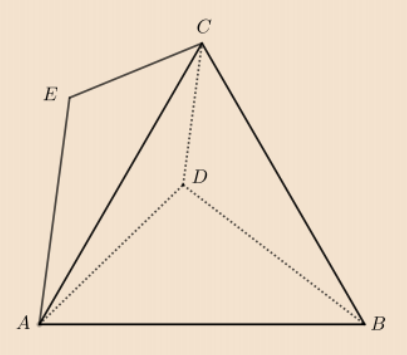


(c)

$$\text{para } x = -2 \text{ tem-se: } -2 < 1 \Rightarrow 4 < 1 \qquad (F)$$

Questão 03 [1,25 ::: (a)=0,25; (b)=0,50; (c)=0,25; (d)=0,25]

Seja D um ponto no interior de um triângulo equilátero ABC de lado ℓ tal que $\overline{AD} = 7$, $\overline{BD} = 8$ e $\overline{CD} = 5$. Considere um ponto E no exterior do triângulo ABC, conforme a figura, tal que o ângulo $D\widehat{C}E = 60°$ e $\overline{CD} = \overline{CE}$.



(a) Mostre que os triângulos ACE e BCD são congruentes.

(b) Determine os comprimentos dos segmentos AE e DE.

(c) Encontre a medida do ângulo $A\widehat{E}D$.

(d) Encontre o valor de ℓ.

Solução:

(a)

$AC \cong BC$, pois ΔABC é equilátero; $\angle ACE \cong \angle BCD$, pois $\angle ACE + \angle ACD = 60° = \angle BCD + \angle ACD$;

$CE \cong CD$, do enunciado.

Portanto, pelo caso LAL, os triângulos ACE e BCD são congruentes.

(b)

$AE \cong BD \Rightarrow \overline{AE} = 8$

ΔDCE é equilátero, logo $DE \cong CD \Rightarrow \overline{DE} = 5$

(c)

Seja $\theta = \angle AED$. Assim, pela Lei dos Cossenos, temos:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{DE} \cdot \cos\theta \Rightarrow 49 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$$

(d)

Seja $\emptyset = \angle AEC = \theta + 60° = 120°$. Assim, pela Lei dos Cossenos, temos:

$$\overline{CA}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{CE} \cdot \cos\emptyset \Rightarrow \ell^2 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 120° \Rightarrow \ell^2 = 129 \Rightarrow \ell = \sqrt{129}$$

Questão 04 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Dizemos que dois polinômios $p(X)$ e $q(X)$ são *tangentes para* $X = r$ quando a diferença $p(X) - q(X)$ é divisível por $(X - r)^2$.

(a) Mostre que $p(X) = aX^2 + bX + c$ e $q(X) = (2ar + b)X + (c - ar^2)$ são tangentes para $X = r$.

(b) Seja $p(X) = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$, em que $n \geqslant 2$ e $a_1 \neq 0$. Encontre o polinômio de grau 1 que é tangente a $p(X)$ para $X = 0$.

(a)

Queremos mostrar que $p(X) - q(X)$ é divisível por $(X - r)^2$, com

$p(X) = aX^2 + bX + c$ e $q(X) = (2ar + b)X + (c - ar^2)$.

De fato,

$$p(X) - q(X) = aX^2 + bX + c - (2ar + b)X - (c - ar^2) = aX^2 + bX + c - 2arX - bX - c + ar^2$$

$$p(X) - q(X) = a(X^2 - 2rX + r^2) = a(X - r)^2 \Rightarrow \frac{p(X) - q(X)}{(X - r)^2} = a$$

Portanto, $p(X) - q(X)$ é divisível por $(X - r)^2$.

(b)

Sabemos que $p(X) - q(X)$ é divisível por X^2, com

$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0, n \geq 2$ e $q(X) = aX + b$.

Assim,

$$p(X) - q(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 - aX - b$$

$$p(X) - q(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + (a_1 - a)X + (a_0 - b)$$

Logo, $p(X) - q(X)$ é divisível por X^2 se $a_1 - a = 0$ e $a_0 - b = 0$, ou seja, $a = a_1$ e $b = a_0$.

Portanto, o polinômio que satisfaz ao enunciado é $q(X) = a_1X + a_0$.

Questão 05 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

(a) Quais são os possíveis restos da divisão do quadrado de um número inteiro por 5?

(b) Uma *tripla pitagórica* é uma tripla de inteiros positivos a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Use o item (a) para mostrar que em toda tripla pitagórica sempre há um múltiplo de 5.

Solução:

(a)

Seja r_0 o resto da divisão de n por 5. Assim,

$$n \equiv r_0 \; mod \; 5 \Rightarrow n^2 \equiv r_0^2 \; mod \; 5 \equiv r \; mod \; 5 \Rightarrow r \equiv r_0^2 \; mod \; 5, \qquad 0 \leq r < 5$$

r_0	r_0^2	r
0	0	0
1	1	1
2	4	4
3	9	4
4	16	1

Portanto, os possíveis restos são: 0, 1 e 4.

(b)

$$a^2 + b^2 \equiv c^2 \; mod \; 5$$

Vamos supor que a e b não sejam múltiplos de 5. Assim, temos os seguintes resultados possíveis:

a^2	b^2	c^2
1	1	2
1	4	0
4	4	3

Como 2 e 3 não são restos possíveis da divisão de c^2 por 5, então $c^2 \equiv 0 \; mod \; 5 \Rightarrow c \equiv 0 \; mod \; 5$.

Logo, se na tripla pitagórica (a, b, c), a e b não são múltiplos de 5, necessariamente c será.

Portanto, na tripla pitagórica sempre haverá um múltiplo de 5.

Questão 06 [1,25]

Um poliedro é dito *inscritível* se existir uma esfera que passa por todos os seus vértices. Mostre que um prisma reto cuja base é um polígono regular é um poliedro inscritível.

Solução:

Queremos mostrar que existe uma esfera contendo os $2n$ vértices do prisma reto cuja base é um polígono regular de n lados.

a) Por definição, os dois planos que contém as bases do prisma são paralelos.

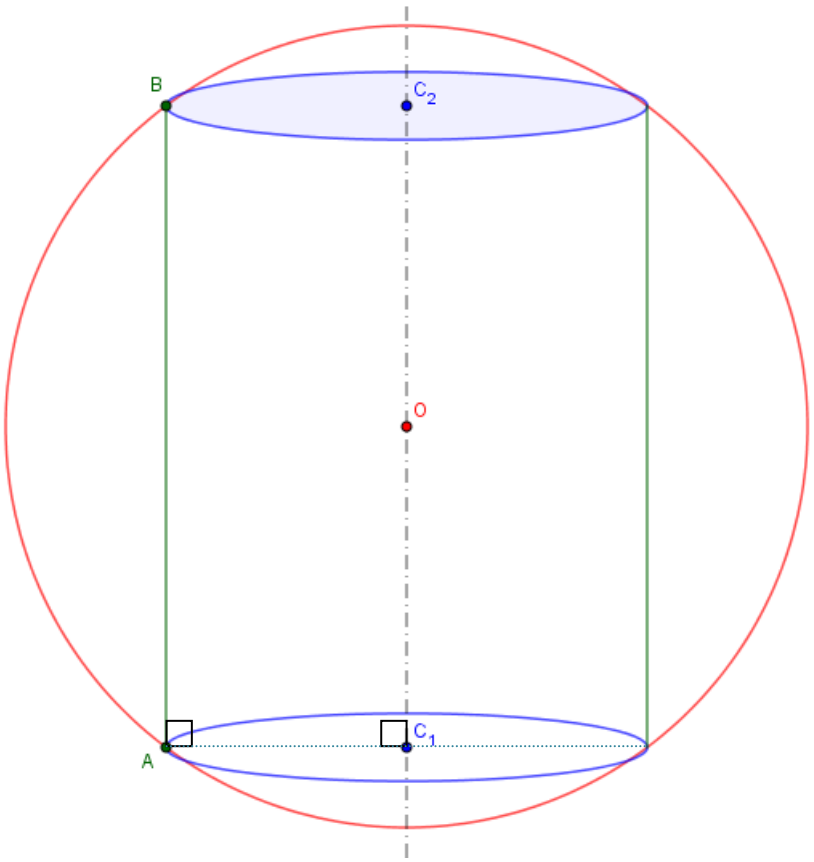
b) Como o polígono da base é regular, então o polígono é inscritível num círculo Γ_1.

c) Como o polígono da outra base é congruente ao anterior, então é inscritível num círculo Γ_2.

d) Como os círculos Γ_1 e Γ_2 estão em planos paralelos e as arestas laterais e a reta que passa pelos C_1 e C_2 dos centros dos círculos são perpendiculares aos referidos planos (prisma reto), tais círculos estão contidos numa mesma esfera $\mathcal{E}$ de centro O (ponto médio dos centros dos círculos).

Portanto, fica demonstrado que o prisma definido no enunciado é inscritível.

Ilustração



Questão 07 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = ax^4 + \dfrac{2b}{x^2}$, onde a e b são números reais positivos.

(a) Calcule $f\left(\sqrt[6]{\dfrac{b}{a}}\right)$.

(b) Use a desigualdade das médias para provar que o valor encontrado no item anterior é o valor mínimo de f.

Solução:

(a)

$$f\left(\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\right) = f\left(\frac{b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right) = a \cdot \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{2b}{b^{\frac{1}{3}}/a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} = 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{ab^2}$$

(b)

Pela Desigualdade das Médias, sabemos que, dados x_1, x_2, x_3 positivos, tem-se:

$A(x_1, x_2, x_3) \geq G(x_1, x_2, x_3)$

Sejam $x_1 = ax^4, x_2 = bx^{-2}, x_3 = bx^{-2}$. Logo,

$$A(ax^4, bx^{-2}, bx^{-2}) \geq G(ax^4, bx^{-2}, bx^{-2}) \Rightarrow \frac{f(x)}{3} \geq \sqrt[3]{ab^2} \Rightarrow f(x) \geq 3\sqrt[3]{ab^2} \therefore f_{mín} = f\left(\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\right)$$

Questão 08 [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

Um ônibus possui 32 poltronas distribuídas em 8 fileiras, ou seja, quatro em cada fileira, duas em cada lado do corredor. Pergunta-se:

(a) Se forem os primeiros a entrar no ônibus, de quantas formas uma criança e seus dois responsáveis podem ocupar três poltronas do ônibus de modo que todos fiquem na mesma fileira e um dos adultos fique ao lado da criança, sem que esteja separado pelo corredor?

(b) Se outras 29 pessoas já entraram no ônibus, ocupando as poltronas de forma completamente aleatória, deixando apenas 3 poltronas livres, qual a probabilidade de que seja possível os três se sentarem da forma estabelecida no item anterior?

Solução:

(a) As formas possíveis para cada uma das 8 fileiras, com a criança de um dos lados do corredor, são:

(C, A, B, V), (C, A, V, B), (A, C, B, V), (A, C, V, B), (A, V, C, B), (V, A, C, B), (A, V, B, C), (V, A, B, C) → 8 formas

Portanto, no total, existem $8 \cdot 2 \cdot 8 = 128$ formas possíveis.

(b) O espaço amostral é formado por todas as permutações com repetição de 29 poltronas ocupadas e 3 vazias (corresponde ao número de anagramas da palavra $OOOO \cdots OVVV$):

$$|\Omega| = PR_{32}^{29,3} = \frac{32!}{3!\,(32-3)!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 160 \cdot 31$$

O evento que representa a regra estabelecida no item anterior é formado pelo total de fileiras, que, pelo Princípio Fundamental da Contagem, deve ser multiplicado pela quantidade de poltronas que podem ser ocupadas em cada fileira, ou seja:

$$|E| = 8 \cdot 4 = 32$$

A probabilidade p em questão é dada por:

$$p = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{32}{160 \cdot 31} = \frac{1}{5 \cdot 31} \Rightarrow p = \frac{1}{155}$$