Q1. Resolva as seguintes recorrências:

(a) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n = 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3.$

(b) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n,\ a_0 = -1,\ a_1 = 6.$

<u>Uma solução resumida</u>:

(a) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n = 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3$

Equação característica:

$r^2 - 5r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ \ r_2 = 4$

Solução geral:

$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \Rightarrow a_n = c_1 + c_2 4^n$

Solução da recorrência dada:

$n = 0:\ a_0 = c_1 + c_2 = 1$

$n = 1:\ a_1 = c_1 + 4c_2 = 3$

$\therefore c_1 = \dfrac{1}{3}, \qquad c_2 = \dfrac{2}{3}$

Resolvendo o sistema de equações e substituindo na solução geral, temos:

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}4^n = \frac{1}{3}(2^{2n+1} + 1)$$

(b) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n,\ a_0 = -1,\ a_1 = 6$

Equação característica da recorrência homogênea associada:

$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$

Solução geral da recorrência homogênea associada:

$$b_n = (c_1 + nc_2)r^n \Rightarrow b_n = (c_1 + nc_2)2^n$$

Solução particular da recorrência dada:

$$c_n = kn^2 2^n$$
$$c_{n+1} = 2kn^2 2^n + 4kn2^n + 2k_2 2^n$$
$$c_{n+2} = 4kn^2 2^n + 16kn2^n + 16k_2 2^n$$

$$c_{n+2} - 4c_{n+1} + 4c_n = 2^n \Rightarrow 4kn^2 + 16kn + 16k - 8kn^2 - 16kn - 8k + 4kn^2 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16k - 8k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$$
$$\therefore c_n = \frac{n^2}{8}2^n$$

Solução geral da recorrência dada:

$$a_n = b_n + c_n = (c_1 + nc_2)2^n + \frac{n^2}{8}2^n = \left(c_1 + nc_2 + \frac{n^2}{8}\right)2^n$$

Solução da recorrência dada:

$$\begin{cases} a_0 = c_1 = -1 \\ a_1 = \left(c_1 + c_2 + \frac{1}{8}\right)\cdot 2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = \frac{31}{8} \end{cases}$$
$$\therefore a_n = \left(-1 + \frac{31n}{8} + \frac{n^2}{8}\right)\cdot 2^n = 2^{n-3}(n^2 + 31n - 8)$$

Q2.

(a) Prove, usando indução, que $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133, para qualquer número natural n.

(b) Prove, usando congruências, que $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133, para qualquer número natural n.

<u>Uma solução resumida</u>:

(a) Queremos provar que $\forall n \in \mathbb{N}, 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133k$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Vamos provar por indução sobre n.

i) A igualdade é válida para $n = 1$, pois:

$$11^{1+2} + 12^{2\cdot 1+1} = 11^3 + 12^3 = (11 + 12)(11^2 - 11 \cdot 12 + 12^2) = 133 \cdot 23$$

ii) Supondo, por hipótese, que a igualdade é válida para um $n \in \mathbb{N}$, vamos verificar se é válida para $n + 1$:

$$11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1} = 11 \cdot 11^{n+2} + 144 \cdot 12^{2n+1} =$$
$$= 11 \cdot 11^{n+2} + 133 \cdot 11^{n+2} - 133 \cdot 11^{n+2} + 144 \cdot 12^{2n+1} =$$
$$= 144 \cdot 11^{n+2} + 144 \cdot 12^{2n+1} - 133 \cdot 11^{n+2} =$$
$$= 144 \cdot (11^{n+2} + 12^{2n+1}) - 133 \cdot 11^{n+2}$$

Mas, por hipótese, $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133k$, logo:

$$11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1} = 144 \cdot 133k - 133 \cdot 11^{n+2} = 133 \cdot (144k - 11^{n+2})$$

onde $144k - 11^{n+2} = k'$e $k' \in \mathbb{N}$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, concluímos que:

$\forall n \in \mathbb{N}, 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133k$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

(b) Vamos provar que $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

De fato,

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \equiv -12 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \equiv$$

$$\equiv 12 \cdot (144^n - 11^n) \equiv 12 \cdot (144 - 11) \equiv 12 \cdot 133 \equiv 0 \ (mod\ 133)$$

Portanto, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Q3. Dado um número real x, o piso de x, denotado por $\lfloor x \rfloor$, é o único inteiro k tal que $k \leq x < k + 1$.

(a) Considere a e b, respectivamente, o menor e o maior número natural com n algarismos expressados no sistema decimal. Forneça expressões algébricas para a e b em função de n.

(b) Mostre que a quantidade de algarismos, no sistema decimal, do número inteiro positivo N é igual a $\lfloor \log N \rfloor + 1$, onde log é a função logaritmo decimal.

(c) Mostre que se p é um inteiro positivo, então $2^p - 1$ tem $\lfloor p \cdot \log 2 \rfloor + 1$ algarismos no sistema decimal.

<u>Uma resolução resumida</u>:

(a) Para encontrar as expressões, basta notar o padrão para algumas quantidades de algarismos:

1 algarismo: $a = 0$, $b = 9$

2 algarismos: $a = 10$, $b = 99$

3 algarismos: $a = 100$, $b = 999$

n algarismos: $a_n = 10^{n-1}$, $b_n = 10^n - 1$

Obs.: pode-se provar por indução.

(b) Seja N um número inteiro positivo de n algarismos. Assim,

$$a_n \leq N \leq b_n \Rightarrow 10^{n-1} \leq N \leq 10^n - 1 \Rightarrow n - 1 \leq \log N < n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n - 1 = \lfloor \log N \rfloor \Rightarrow n = \lfloor \log N \rfloor + 1$$

(c) Pelo item anterior,

$$n - 1 \leq \log N < n, \quad N = 2^p - 1 \Rightarrow 10^{n-1} \leq 2^p - 1 < 10^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10^{n-1} + 1 \leq 2^p < 10^n + 1 \Rightarrow n - 1 \leq \log 2^p < n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n - 1 = \lfloor \log 2^p \rfloor \Rightarrow n = \lfloor p \cdot \log 2 \rfloor + 1$$

Q4. Dados dois segmentos de comprimentos s e q, com $s > 2q$, indique a construção com régua e compasso, de segmentos cujos comprimentos sejam iguais às raízes da equação do segundo grau $x^2 - sx + q^2 = 0$.

Uma resolução simplificada:

1. Primeiro, vamos resolver a equação pela Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4q^2}}{2} \Rightarrow x = \frac{s \pm \sqrt{(s+2q)(s-2q)}}{2}$$

Logo,

$$x_1 = \frac{s+t}{2}, \qquad x_2 = \frac{s-t}{2}, \qquad t^2 = (s+2q)(s-2q)$$

2. Trace uma reta r, e marque os pontos O e P em r, tais que $\overline{PO} = s$;

3. Trace o círculo de centro O e raio $2q$, determinando os pontos A e B em r;

4. Encontre o ponto médio M de PO e trace o círculo de centro M e raio $\overline{PM}$, determinando o segmento PT, onde T é o ponto de tangência da semirreta PT com o círculo de centro O;

5. Pela Potência de P em relação ao círculo de centro O, tem-se:

$$PT^2 = PA \cdot PB \Rightarrow PT^2 = (s+2q)(s-2q)$$

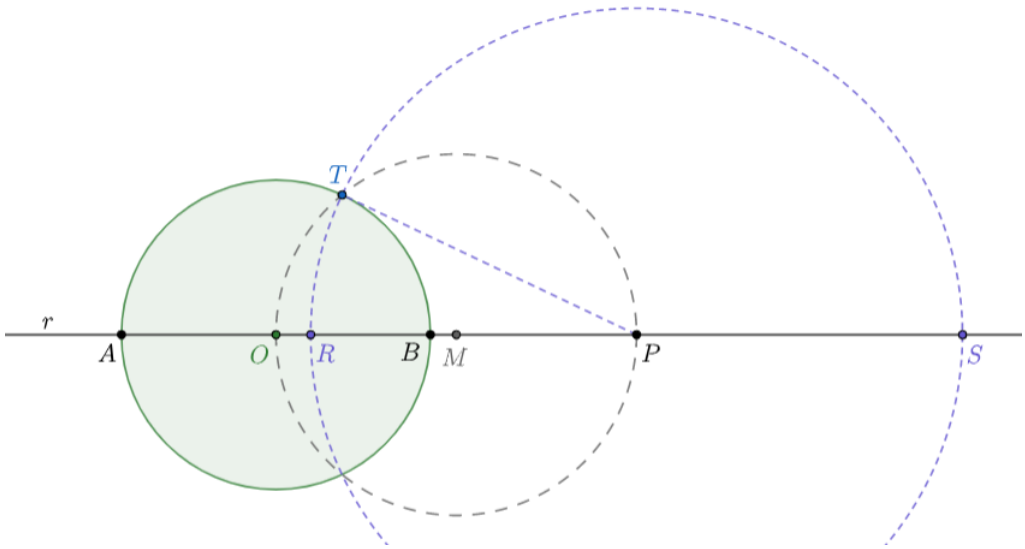
Assim, $PT = t$. Portanto, $t^2 = (s+2q)(s-2q)$

6. Trace o círculo de centro P e raio t, determinando em r os pontos R e S;

7. x_1 é a metade da medida do segmento OS;

8. x_2 é a metade da medida do segmento OR.

Ilustração da construção descrita:



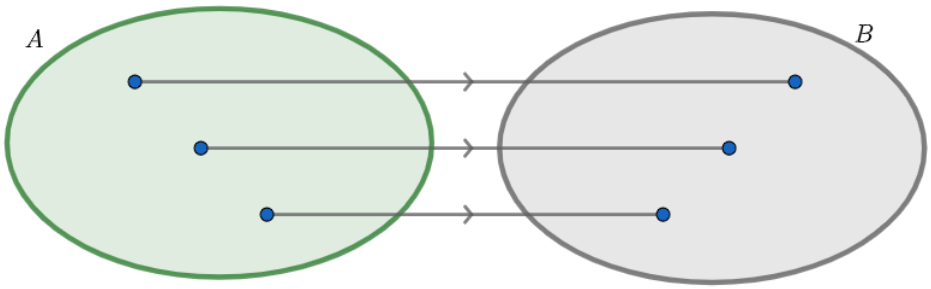
Q5. Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios com, respectivamente, a e b elementos.

(a) Qual a relação entre a e b para que exista alguma função bijetiva de A em B? Nesta condição, quantas funções bijetivas existem?

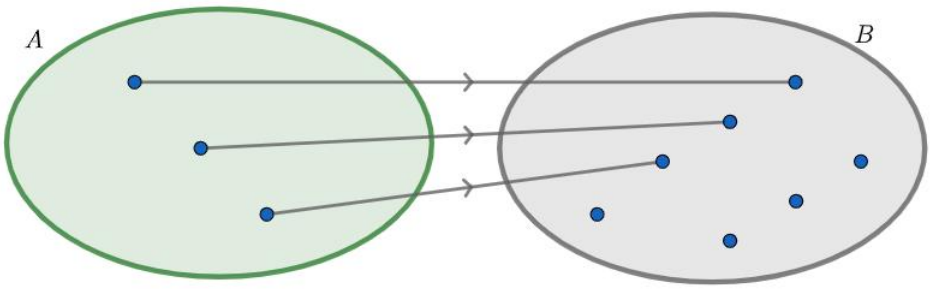
(b) Qual a relação entre a e b para que exista alguma função injetiva de A em B? Nesta condição, quantas funções injetivas existem?

<u>Uma resolução resuminda</u>:

(a) Para que exista função bijetiva de A em B, basta que A e B tenham a mesma quantidade de elementos, ou seja, $a = b$. Neste caso, existem $a!$ funções bijetivas.



(b) Para que exista função injetiva de A em B, basta que A não tenha mais elementos do que B, ou seja, $a \leq b$. Neste caso, existem $\frac{b!}{(b-a)!}$ funções injetivas.



Q6. Considere a função polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = (x^2 + 2019x - 1)^2 + (2x + 2019)^2$$

(a) Determine as constantes k e h tais que a função possa ser reescrita da maneira:

$$f(x) = (x^2 + kx + 1)^2 + h$$

(b) Usando a expressão encontrada no item anterior, encontre o menor valor real α, assumido pela função f.

(c) Encontre a média aritmética de todas as raízes reais da equação $f(x) = \alpha$, com α encontrado no item anterior.

<u>Uma resolução resumida</u>:

(a) Como as duas expressões representam a mesma função f, suas derivadas em relação a x também são iguais. Assim:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}[(x^2 + kx + 1)^2 + h] = \frac{d}{dx}[(x^2 + 2019x - 1)^2 + (2x + 2019)^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(2x + k)(x^2 + kx + 1) = 2(2x + 2019)(x^2 + 2019x - 1) + 4(2x + 2019) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x + k)(x^2 + kx + 1) = (2x + 2019)(x^2 + 2019x + 1) \Rightarrow k = 2019$$

Agora, comparando os dois valores numéricos de $f(0)$, temos:

$$1 + h = 1 + 2019^2 \Rightarrow h = 2019^2 = 4076361$$

(b) Substituindo os valores de k e h encontrados no item anterior, temos:

$$f(x) = (x^2 + 2019x + 1)^2 + 2019^2$$

Como o menor valor da primeira parcela é 0, então $\alpha = 2019^2$.

(c) Vamos escrever a equação $f(x) = \alpha$, ou seja,

$$(x^2 + 2019x + 1)^2 + 2019^2 = 2019^2 \Rightarrow x^2 + 2019x + 1 = 0$$

Pelas Relações de Girard, temos:

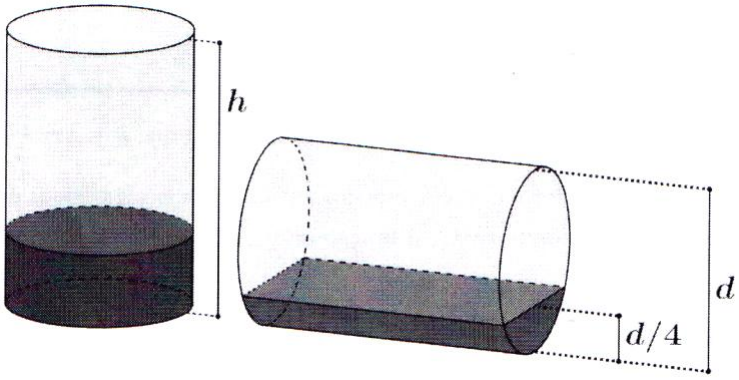
$$x_1 + x_2 = -2019$$

Portanto, a média das 4 raízes da equação quártica $f(x) = \alpha$ é dada por:

$$MA(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{-2019 - 2019}{4} \Rightarrow MA(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\frac{2019}{2}$$

Q7. Um recipiente cilíndrico de base circular está parcialmente cheio de água. Quando "deitado", isto é, apoiado sobre uma de suas geratrizes, o nível da água atinge um quarto do diâmetro d da base do cilindro, conforme figura. Quando o cilindro é "levantado", isto é, apoiado sobre uma de suas bases, o nível da água atinge que fração da altura h do cilindro?

Observação: Considere desprezível a espessura das paredes e das bases do recipiente.

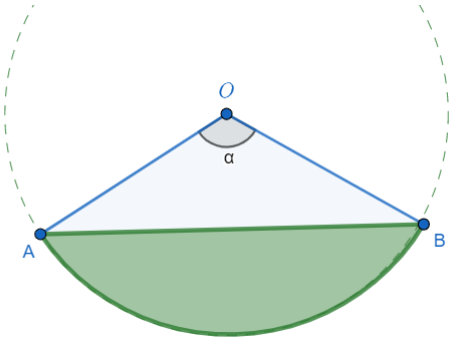


<u>Uma resolução resumida</u>:

Seja V o volume do recipiente e V_a o volume da água no recipiente.

O volume V_a no recipiente deitado é dado pela área do segmento circular multiplicado pela altura h.

Calculo da área S_a do segmento circular de raio $r = d/2$ e ângulo $\alpha = 120^o$:



$$S_a = S(\text{setor}) - S(\text{triângulo}) \Rightarrow S_a = \frac{\pi}{3}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 \Rightarrow S_a = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$$

Cálculo da altura h' do nível da água quando o recipiente está levantado:

$$V_a = \pi r^2 h', \;\; V_a = S_a h \Rightarrow \pi r^2 h' = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2 h \Rightarrow h' = \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\right)h$$

Q8.

(a) Determine o menor número natural c para o qual a equação $5X + 7Y = c$ tenha exatamente 4 soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) Determine, explicitamente, as 4 soluções obtidas no item (a).

<u>Uma resolução resumida</u>:

(a) Solução geral da equação $5x + 7y = 1, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{Z}$:

Uma solução particular pode ser: $x_0 = 3,\ y_0 = -2$. Assim, sua solução geral será:

$$\begin{cases} x = 3 - 7t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$$

Solução geral para a equação $5x + 7y = c;\ \ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x = 3c \quad - 7t \\ y = -2c + 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 15c \quad - 35t \\ 7y = -14c + 35t \end{cases}$$

Pondo $x = 0$ e somando as equações, temos $7y = c$.

Pondo $y = 0$ e somando as equações, temos $5x = c$.

Logo, c é múltiplo de $7 \cdot 5 = 35$, isto é, $c = 35k,\ \ k \in \mathbb{N}$.

Vamos verificar qual o menor valor de c que resulta em 4 valores de t na equação original:

$$\begin{cases} 0 \le 3 \cdot 35k \quad - 7t \\ 0 \le -2 \cdot 35k + 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le 15k \quad - t \\ 0 \le -14k + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \le 15k \\ t \ge 14k \end{cases} \Rightarrow 14k \le t \le 15k$$

Sejam $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4$ quatro valores consecutivos de t. O menor valor de k tal que só existam os quatro valores no intervalo é 3, assim

$$14 \cdot 3 \le t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \le 15 \cdot 3 \Rightarrow 42 \le t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \le 45$$

Portanto, $c = 35k,\ \ k = 3 \Rightarrow c = 105$

(b) Vimos no item anterior que a solução geral da equação é dada por:

$$\begin{cases} x = 3c \quad - 7t \\ y = -2c + 5t \end{cases}$$

Substituindo $c = 105$, temos:

$$\begin{cases} x = 315 \quad - 7t \\ y = -210 + 5t \end{cases}$$

Portanto, temos as seguintes soluções para $42 \leq t \leq 45$:

<u>Solução 1</u>:

$$\begin{cases} x = 315 \quad - 7t \\ y = -210 + 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 315 \quad - 7 \cdot 42 \\ y = -210 + 5 \cdot 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 0 \end{cases}$$

<u>Solução 2</u>:

$$\begin{cases} x = 315 \quad - 7t \\ y = -210 + 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 315 \quad - 7 \cdot 43 \\ y = -210 + 5 \cdot 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 5 \end{cases}$$

<u>Solução 3</u>:

$$\begin{cases} x = 315 \quad - 7t \\ y = -210 + 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 315 \quad - 7 \cdot 44 \\ y = -210 + 5 \cdot 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 10 \end{cases}$$

<u>Solução 4</u>:

$$\begin{cases} x = 315 \quad - 7t \\ y = -210 + 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 315 \quad - 7 \cdot 45 \\ y = -210 + 5 \cdot 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 15 \end{cases}$$

Que prova trabalhosa!!