Prova de matemática da EsPCEx – 2017/2018

modelo F

Q.1 Duas instituições financeiras fornecem senhas para seus clientes, construídas segundo os seguintes métodos:

1ª instituição: 5 caracteres distintos formados por elementos do conjunto

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};

2ª instituição: 6 caracteres distintos formados por duas letras, dentre as vogais, na primeira e na segunda posições da senha, seguidas por 4 algarismos dentre os elementos do conjunto {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Para comparar a eficiência entre os métodos de construção das senhas, medindo sua maior ou menor vulnerabilidade, foi definida a grandeza "força da senha", de forma que, quantas mais senhas puderem ser criadas pelo método, mais "forte" será a senha.

Com base nessas informações, pode-se dizer que, em relação à 2ª instituição, a senha da 1ª instituição é

[A] 10% mais fraca.
[B] 10% mais forte.
[C] de mesma força.
[D] 20% mais fraca.
[E] 20% mais forte.

Resolução

$$f_1 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5; \;\; f_2 = 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{9}{10} = 90\% = 100\% - 10\%$$

Alternativa [A]

Q.2 O conjunto solução da inequação $||x - 4| + 1| \leq 2$ é um intervalo do tipo [a, b]. O valor de a + b é igual a

[A] – 8. [B] – 2. [C] 0. [D] 2. [E] 8.

Resolução

$$\big||x-4|+1\big| \leq 2, |x-4|+1 > 0 \rightarrow |x-4|+1 \leq 2 \rightarrow |x-4| \leq 1 \rightarrow$$

$$-1 \leq x-4 \leq 1 \rightarrow 3 \leq x \leq 5 \rightarrow [a,b] = [3,5] \rightarrow a+b = 8$$

Alternativa [E]

Q.3 Determine o valor numérico do polinômio $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2017$ para x = 89.

[A] 53 213 009.
[B] 57 138 236.
[C] 61 342 008.
[D] 65 612 016.
[E] 67 302 100.

Resolução

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \rightarrow p(x) = (x+1)^4 + 2016$$

$$p(89) = 90^4 + 2016 = 65610000 + 2016 = 65612016$$

Alternativa [D]

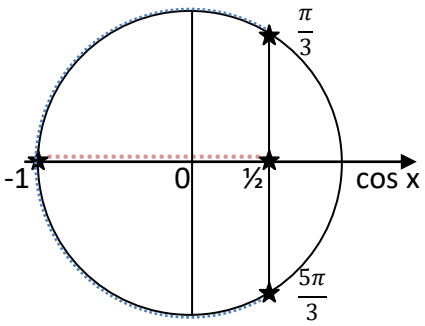
Q.4 O conjunto solução da inequação 2 sen² x – cos x – 1 ≥ 0, no intervalo]0, 2π] é

[A] $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.
[B] $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$.
[C] $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.
[D] $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.
[E] $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

Resolução

$$2sen^2\, x - \cos x - 1 \geq 0 \rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1 \leq 0 \rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) \leq 0$$



Alternativa [C]

Q.5 Resolvendo a equação $\log_3(x^2 - 2x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) = \log_3(x + 1)$, obtém-se

[A] S = {– 1}. [B] S = {4, 5}. [C] S = {6}. [D] S = ϕ. [E] S = {4}.

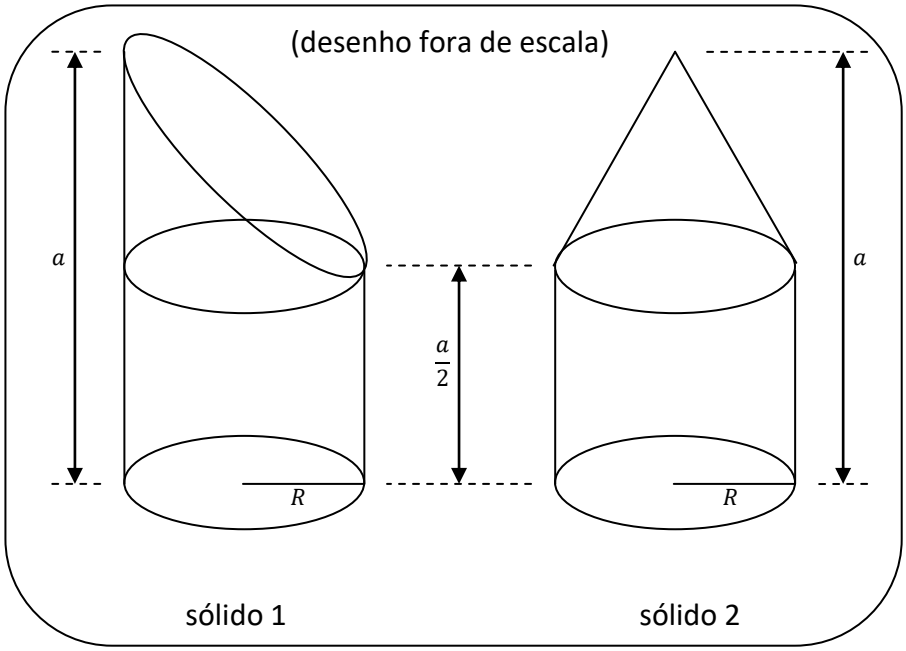
Resolução

$$C.E.:\ x > 3;\ \log_3(x^2 - 2x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) = \log_3(x + 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \log_3 \frac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \log_3(x+1) \rightarrow \nexists x \in R$$

Alternativa [D]

Q.6 O valor da altura de um cilindro reto de raio R, cujo volume é a soma dos volumes dos sólidos 1 e 2 é



[A] $\frac{13}{12}a$. [B] $\frac{7}{6}a$. [C] $\frac{5}{4}a$. [D] $\frac{4}{3}a$. [E] $\frac{17}{12}a$.

Resolução

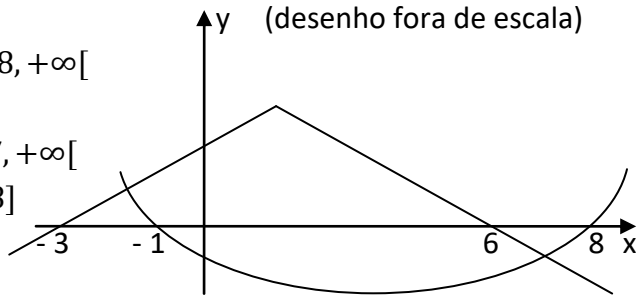
$$\pi R^2 h = \left(\frac{\pi R^2 a}{2} + \frac{\pi R^2 a}{4}\right) + \left(\frac{\pi R^2 a}{2} + \frac{\pi R^2 a}{6}\right) = \frac{17\pi R^2 a}{12} \rightarrow h = \frac{17}{12}a$$

Alternativa [E]

Q.7 Na figura estão representados os gráficos das funções reais *f* (quadrática) e *g* (modular) definidas em ***R***. Todas as raízes das funções *f* e *g* também estão representadas na figura.

Sendo $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, assinale a alternativa que apresenta os intervalos onde *h* assume valores negativos.

[A] $]-3,-1] \cup]6,\ 8]$
[B] $]-\infty,-3[\cup]-1,\ 6[\cup]8,+\infty[$
[C] $]-\infty,\ 2[\cup [4,+\infty[$
[D] $]-\infty,-3] \cup [-1,\ 2[\cup [7,+\infty[$
[E] $]-3,-1] \cup [2,\ 4[\cup]6,\ 8]$



Resolução

$$h(x) < 0 \ \leftrightarrow \ x < -3, \qquad -1 < x < 6, \qquad x > 8$$

Alternativa [B]

Q.8 A angioplastia é um procedimento médico caracterizado pela inserção de um cateter em uma veia ou artéria com o enchimento de um pequeno balão esférico localizado na ponta desse cateter. Considerando que, num procedimento de angioplastia, o raio inicial do balão seja desprezível e aumente a uma taxa constante de 0,5 mm/s até que o volume seja igual a 500 mm³, então o tempo, em segundos, que o balão leva para atingir esse volume é

[A] 10. [B] $10\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$. [C] $10\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$. [D] $10\sqrt[3]{\pi}$. [E] $10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$.

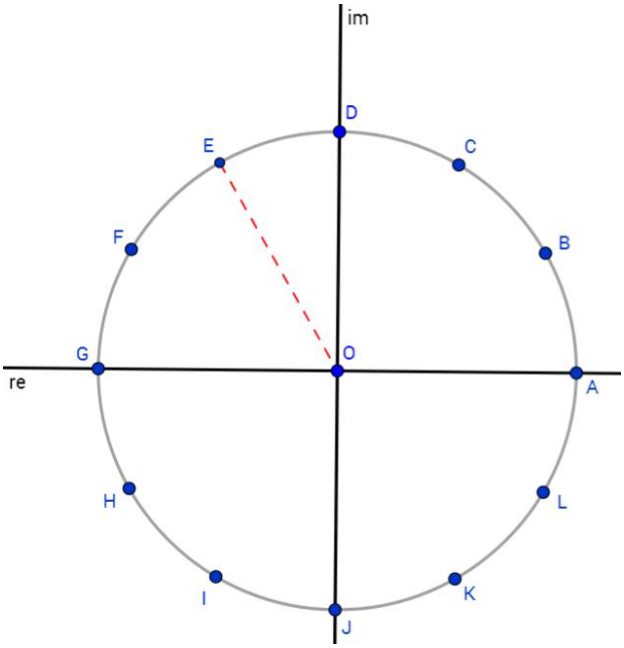
Resolução

$$V_{esfera} = \frac{4\pi}{3} r^3 \rightarrow 500 = \frac{4\pi}{3}(0{,}5\ \Delta t)^3 \rightarrow \Delta t^3 = \frac{3000}{\pi} \rightarrow \Delta t = 10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$$

Alternativa [E]

Q.9 Na figura abaixo, está representado o plano de Argand-Gauss com os afixos de 12 números complexos, identificados de A a L. Sabe-se que esses afixos dividem a circunferência em 12 partes iguais e que A = (1, 0).

O polígono regular cujos vértices são os afixos de $\sqrt[4]{E}$ é



[A] BEHK. [B] CFIL. [C] ADGJ. [D] BDHJ. [E] CEIK.

Resolução

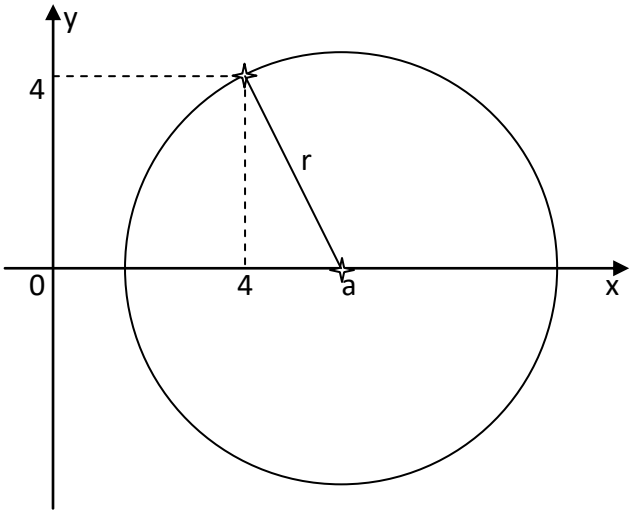
$$E = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3} \rightarrow \sqrt[4]{E} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{4}k\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{4}k\right), k = 0, 1, 2, 3.$$

Alternativa [A]

Q.10 Uma circunferência tem centro no eixo das abscissas, passa pelo ponto (4, 4) e não intercepta o eixo das ordenadas. Se a área do círculo definido por essa circunferência é 17π, a abscissa de seu centro é

[A] 3. [B] 4. [C] 5. [D] 6. [E] 7.

Resolução



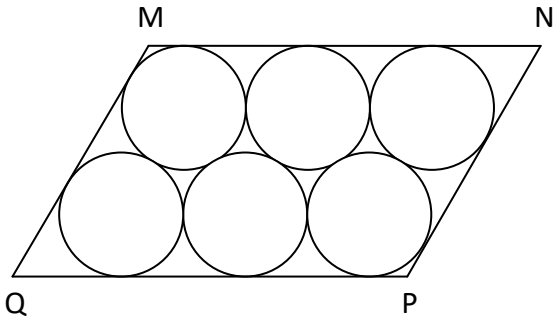
$$S = \pi\, r^2 \rightarrow 17\pi = \pi\, r^2 \rightarrow r^2 = 17$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo desenhado, tem-se:

$$(a-4)^2 + 16 = 17 \rightarrow (a-4)^2 = 1 \rightarrow a = 5$$

Alternativa [C]

Q.11 Seis círculos de raio 1 cm são inseridos no paralelogramo MNPQ, de área X cm², de acordo com a figura abaixo.

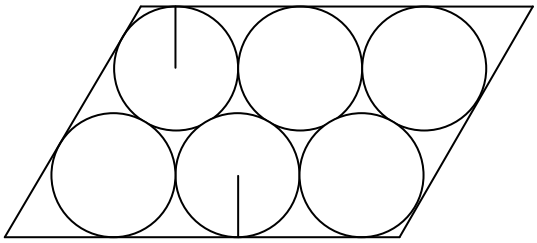


(desenho fora de escala)

Sabendo-se que os seis círculos são tangentes entre si e com os lados do paralelogramo, a área X, em cm², é

[A] $11 + 6\sqrt{3}$.
[B] $\frac{30+14\sqrt{3}}{3}$.
[C] $10 + 5\sqrt{3}$.
[D] $11 + 6\sqrt{3}$.
[E] $\frac{36+20\sqrt{3}}{3}$.

Resolução



$$X = b \cdot h, \qquad b = \frac{4\left(3+\sqrt{3}\right)}{3}, \qquad h = 2+\sqrt{3} \rightarrow X = \frac{36+20\sqrt{3}}{3}$$

Alternativa [E]

Q.12 As raízes inteiras da equação $2^{3x} - 7 \cdot 2^x + 6 = 0$ são

[A] 0 e 1. [B] -3 e 1. [C] -3, 1 e 2. [D] -3, 0 e 1. [E] 0, 1 e 2.

Resolução

$$2^{3x} - 7 \cdot 2^x + 6 = 0 \rightarrow (2^x)^3 - 7(2^x) + 6 = 0$$

Fazendo a substituição

$$2^x = t$$

Temos

$$t^3 - 7t + 6 = t^3 - t - (6t - 6) = t(t^2 - 1) - 6(t - 1) = (t - 1)(t^2 + t - 6) = 0$$

$$t > 0 \quad \rightarrow \quad t_1 = 1, \qquad t_2 = 2 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0, \qquad x_2 = 1$$

Alternativa [A]

Q.13 Uma matriz quadrada A, de ordem 3, é definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j \quad , & se\ i > j \\ (-1)^{i+j}, & se\ i \leq j \end{cases}$$

[A] 4. [B] 1. [C] 0. [D] ¼ . [E] ½ .

Resolução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = 1 + 2 + 1 - 2 + 1 + 1 \rightarrow \det A = 4 \rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{4}$$

Alternativa [D]

Q.14 Seja a igualdade $\frac{a}{3} - \frac{b}{5}i = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)^4$, onde i é a unidade imaginária. Se a e b são números reais, então o quociente a/b é igual a

[A] $\frac{\sqrt{3}}{5}$. [B] $\frac{3\sqrt{3}}{5}$. [C] $-\frac{3\sqrt{3}}{5}$. [D] $-\frac{\sqrt{3}}{5}$. [E] $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Resolução

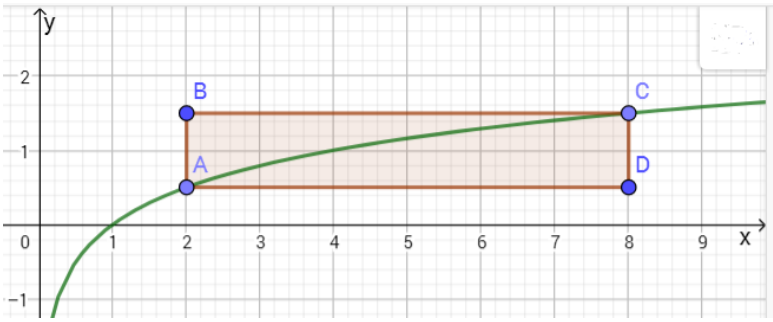
$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)^4 = \cos\frac{4\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{4\pi}{6} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{a}{3} - \frac{b}{5}i$$

Comparando parte real com parte real, e parte imaginária com parte imaginária, vem:

$$\begin{cases} \frac{a}{3} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{b}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = -\frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Alternativa [A]

Q.15 A curva do gráfico abaixo representa a função $y = \log_4 x$.



(desenho ilustrativo fora de escala)

A área do retângulo ABCD é

[A] 12. [B] 6. [C] 3. [D] 6 $\log_4 3/2$. [E] $\log_4 6$.

Resolução

$$S(ABCD) = (8-2)\cdot(\log_4 8 - \log_4 2) = 6\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = 6$$

Alternativa [B]

Q.16 Em uma população de homens e mulheres, 60% são mulheres, sendo 10% delas vegetarianas. Sabe-se, ainda, que 5% dos homens dessa população também são vegetarianos. Dessa forma, selecionando uma pessoa dessa população ao acaso e verificando-se que ela é vegetariana, qual a probabilidade de que seja mulher?

[A] 50%. [B] 70%. [C] 75%. [D] 80% . [E] 85% .

Resolução

	Vegetarianos	Não vegetarianos	Totais
Homens	2	38	40
Mulheres	6	54	60
Totais	8	92	100

$$p(M\backslash V) = \frac{6}{8} = 75\%$$

Alternativa [C]

Q.17 Uma elipse tem centro na origem e vértices em (2a, 0) e (0, a), com a > 0. A área do quadrado inscrito nessa elipse é

[A] $\frac{16a^2}{5}$.
[B] $\frac{4a^2}{5}$.
[C] $\frac{12a^2}{5}$.
[D] $\frac{8a^2}{5}$.
[E] $\frac{20a^2}{5}$.

Resolução

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \qquad x = y = \frac{l}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{l^2}{16a^2} + \frac{l^2}{4a^2} = 1 \rightarrow l^2 = \frac{16a^2}{5}$$

Alternativa [A]

Q.18 Sendo $M = \text{arctg}(x)$, $N = \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ e *P = tg (M – N)*, o valor de *30P* para *x = 15* é

[A] $\frac{224}{30}$.
[B] $\frac{45}{6}$.
[C] 45.
[D] 224.
[E] 225.

Resolução

$$\text{tg}\, M = x, \text{tg}\, N = \frac{1}{x} \rightarrow P = \frac{\text{tg}\, M - \text{tg}\, N}{1 + \text{tg}\, M \cdot \text{tg}\, N} \rightarrow P = \frac{x - \frac{1}{x}}{1+1} \rightarrow 2P = \frac{(x+1)(x-1)}{x}$$

$$30P = \frac{15 \cdot 16 \cdot 14}{15} = 224$$

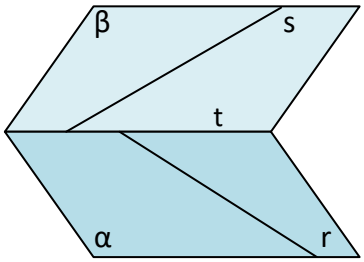
Alternativa [D]

Q.19 Considere dois planos α e β perpendiculares e três retas distintas r, s e t tais que r ⊂ α, s ⊂ β e t = α ∩ β.

Sobre essas retas e os planos é correto afirmar que

[A] as retas r e s somente definirão um plano se forem concorrentes com t em um único ponto.
[B] as retas r e s podem definir um plano paralelo à reta t.
[C] as retas r e s são necessariamente concorrentes.
[D] se r e s forem paralelas, então elas definem um plano perpendicular a α e β.
[E] o plano definido por r e t é necessariamente paralelo a s.

Resolução



Alternativa [B]

Q.20 Considere o triângulo com ângulos agudos internos x, 45° e 120°. O valor de tg^2x é igual a

[A] $\sqrt{3}-2$. [B] $4\sqrt{3}-7$. [C] $7-4\sqrt{3}$. [D] $2-\sqrt{3}$. [E] $2-4\sqrt{3}$.

Resolução

$$-\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(180° - x) = \operatorname{tg}(45° + 120°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 120°}{1 - \operatorname{tg} 45° \ \operatorname{tg} 120°} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{7-4\sqrt{3}}{4-3} = 7-4\sqrt{3}$$

Alternativa [C]