Capítulo 4

Volume do dodecaedro e do icosaedro

4.1 Introdução.

Os cálculos do volume dos sólidos platônicos que geralmente são abordados pelos livros didáticos de Matemática do ensino médio, resumem-se ao cálculo do volume do tetraedro regular, do hexaedro regular e do octaedro regular, não fazendo menção alguma aos cálculos do volume do dodecaedro e nem do icosaedro. Existem livros que não fazem referência alguma aos Sólidos Platônicos, a exemplo do Livro 1, analisado no Capítulo 2.

Por não serem tão comuns os cálculos do volume do dodecaedro e do icosaedro, neste capítulo iremos tratar da dedução das fórmulas para calcular o volume destes sólidos. A dedução da fórmula para calcular o volume do dodecaedro regular apresentada na Seção 4.2, foi realizada com base em uma demonstração que pode ser encontrada em Sérgio [15] e, a dedução da fórmula para calcular o volume do icosaedro, Seção 4.3 foi baseada em Granja e Costa [10].

As demonstrações propostas neste capítulo serão feitas de tal forma que o professor poderá acompanhá-las para explicar para os alunos em sala de aula, pois os conceitos matemáticos que estão envolvidos são do conhecimento de um aluno do 2^o ou 3^o ano do ensino médio.

4.2 A Fórmula para Calcular e Volume do Dodecaedro

Para a dedução da fórmula que permite calcular o volume de um dodecaedro regular, em função da medida da aresta consideremos um dodecaedro regular de aresta a e um cubo inscrito, cuja aresta l, coincide com uma diagonal da face do dodecaedro, ou seja, uma diagonal de um pentágono regular e os seis sólidos congruentes que ficam formados sobre as faces do cubo, conforme pode ser visto nas Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5.

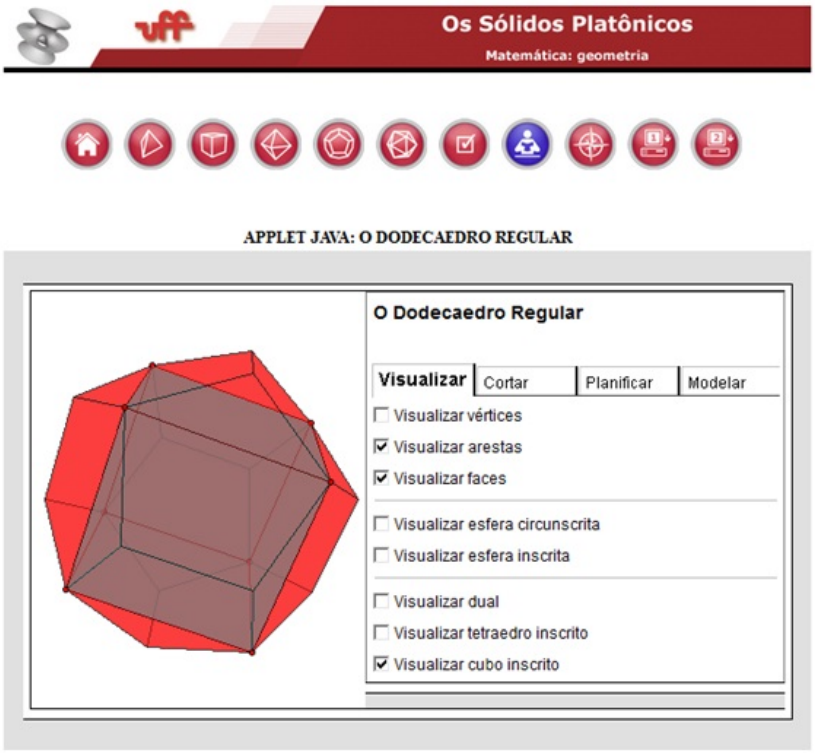

Figura 4.1: Um cubo inscrito no dodecaedro (Fonte: http://www.cdme.im-uff.mat.br/platonicos/ platonicos-html/dodecaedro-br.html)

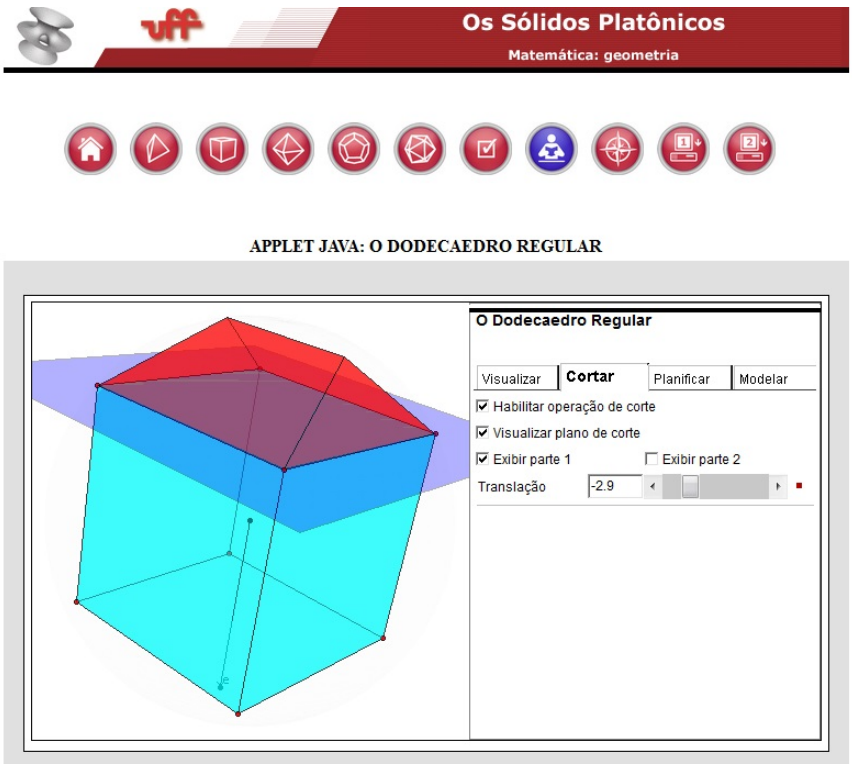

Figura 4.2: Sólido formado sobre a face do cudo inscrito no dodecaedro (Fonte: http://www.cdme.im-uff.mat.br/platonicos/platonicos-html/dodecaedro-br.html)

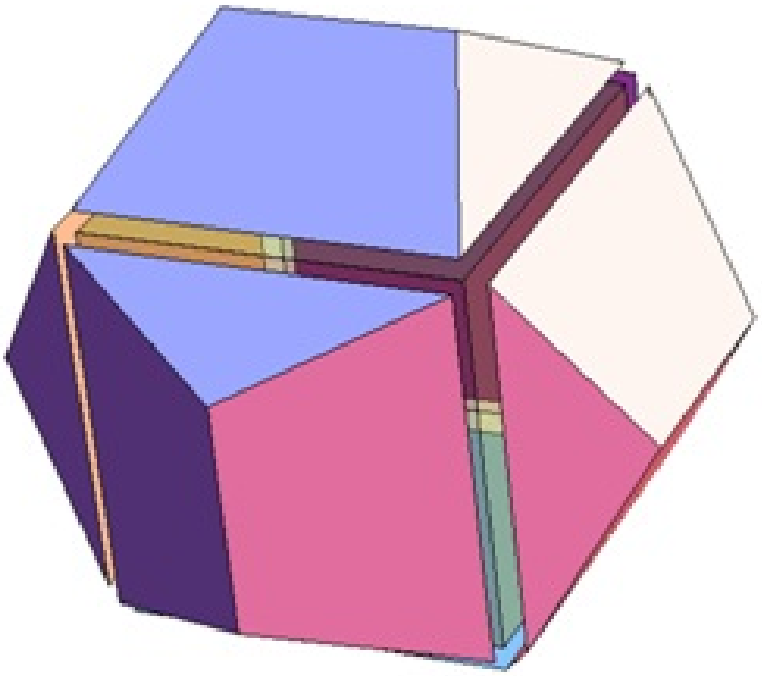

Figura 4.3: Dodecaedro decomposto em um cubo e seis sólidos congruentes (Fonte: http://demonstrations.wolfram.com/RoofingACubeToProduceADodecahedron/)

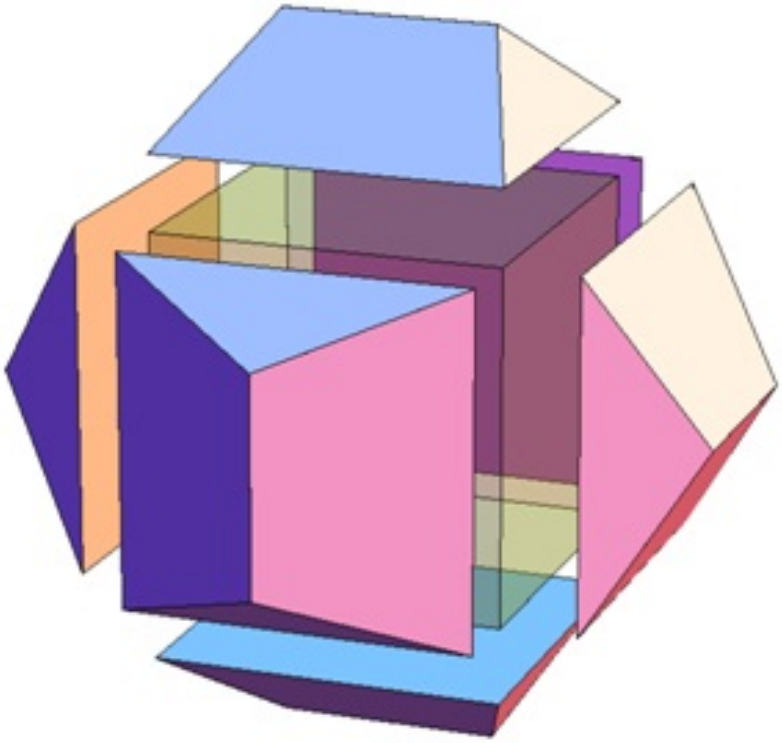

Figura 4.4: Dodecaedro decomposto em um cubo e seis sólidos congruentes (Fonte: http://demonstrations.wolfram.com/RoofingACubeToProduceADodecahedron/)

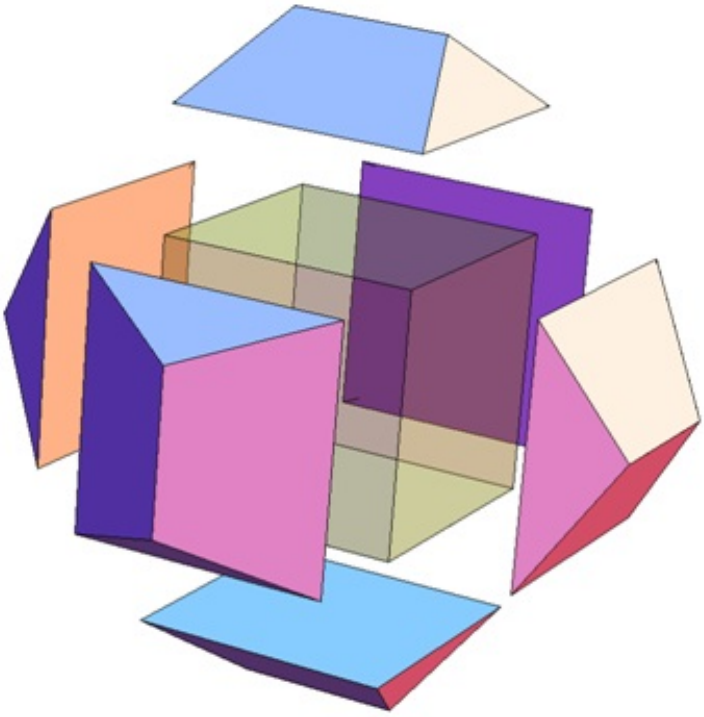

Figura 4.5: Dodecaedro decomposto em um cubo e seis sólidos congruentes (Fonte: http://demonstrations.wolfram.com/RoofingACubeToProduceADodecahedron/)

Vamos inicialmente calcular a medida l, da aresta do cubo.
Considere uma face do dodecaedro representada pela Figura 4.6, o pentágono regular $ABCDE$, no qual temos $\overline{AE} = a$, $\overline{BE} = l$ e o ponto F, o pé da perpendicular baixada do ponto A sobre o segmento BE.

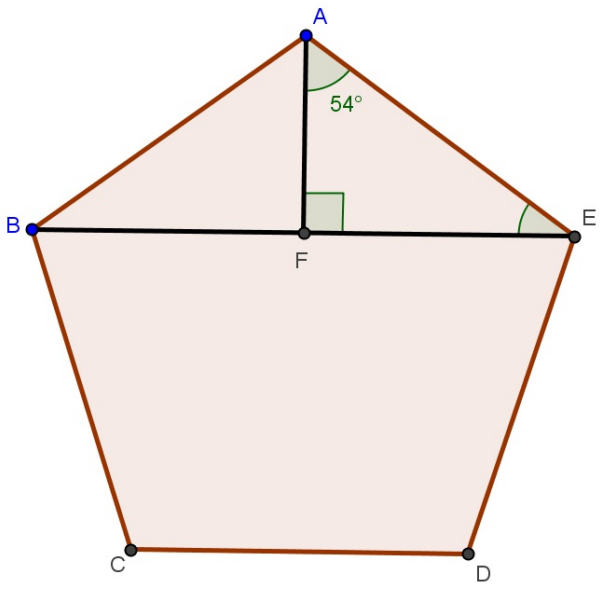

Figura 4.6: Pentágono regular

Observações

• Para representar ângulo utilizaremos ($\widehat{\ }$).

• Para representar medida de ângulo utilizaremos ($\angle$).

• Para representar um triângulo utilizaremos ($\triangle$).

Antes de continuarmos, vamos determinar o valor da medida do ângulo $\widehat{AEF}$. Observe que o $\triangle AEB$ é isósceles de base BE e, que AF é a altura relativa à base. Logo, AF também é bissetriz e mediana (no triângulo isóscele a altura relativa à base coincide com a bissetriz e com a mediana), como $\angle BAE = 108^\circ$, pois é a medida do ângulo interno de um pentágono regular, logo

$$\angle\widehat{FAE} = \frac{\angle\widehat{BAE}}{2} \Longrightarrow \angle\widehat{FAE} = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ.$$

Agora, considerando o $\triangle FAE$, temos: $\angle AFE = 90^\circ$, $\angle FAE = 54^\circ$ e $\angle AEF = 36^\text{o}$. Pois, $\angle\widehat{AFE} + \angle\widehat{FAE} + \angle\widehat{AEF} = 180^\circ$ (soma dos ângulos internos de um triângulo).
Agora calculemos l.

$$\frac{\overline{FE}}{\overline{AE}} = \cos(36^\circ) \Longrightarrow \overline{FE} = \overline{AE}\cos(36^\circ) \Longrightarrow \frac{\overline{BE}}{2} = \overline{BF}\cos(36^\circ) \Longrightarrow \frac{l}{2} = a\cos(36^\circ) \Longrightarrow l = 2a\cos(36^\circ).$$

Como $\cos(36^\circ) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, conforme calculado no Apêndice **A** temos que:

$$l = 2a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \Longrightarrow l = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Para simplificar as expressões façamos

$$\delta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{4.1}$$

e

$$l = a\delta. \tag{4.2}$$

Observe que cada um dos sólidos formado sobre as faces do cubo pode ser decomposto, em um prisma reto de base triangular e as duas partes que sobram formam um pirâmide, por meio de cortes perpendiculares a face que coincide com a face do cubo. Por meio destes cortes obtemos os segmentos h, distância da face do sólido comum a uma face do cubo ao vértice oposto, m a distância de l a este mesmo vértice e, n distância de um vértice do cubo ao plano de corte, conforme pode ser visto nas Figuras 4.7 e 4.8.

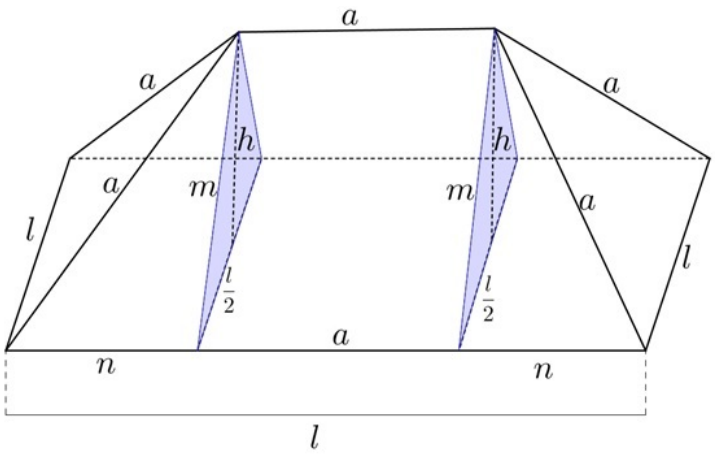

Figura 4.7: Sólido sobre a face do cubo.

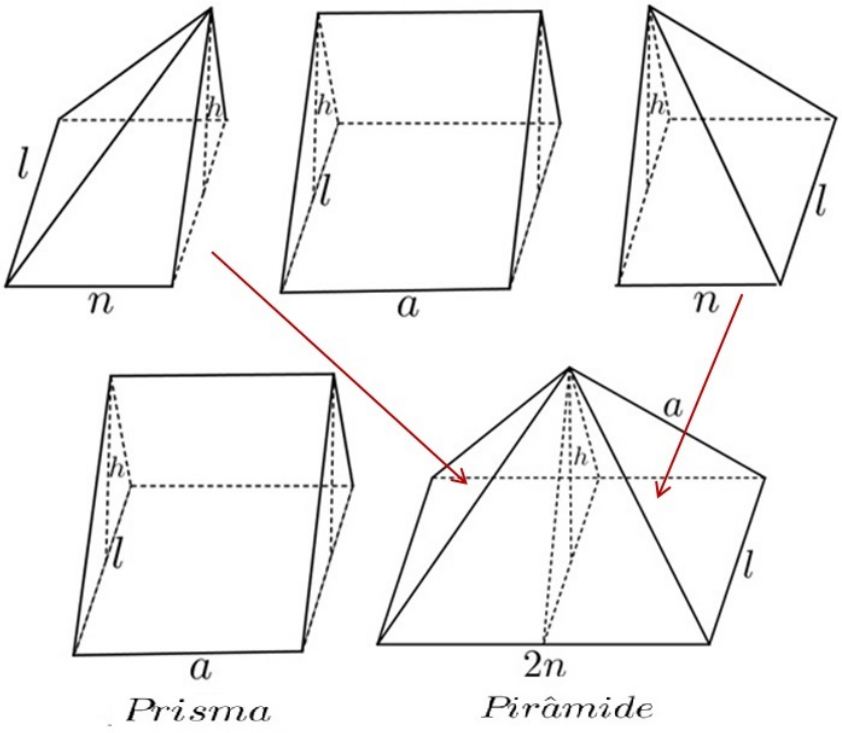

Figura 4.8: Uma prisma e uma pirâmide resultantes do sólido formado sobre a face de cubo inscrito no dodecaedro.

Vamos escrever a medida de h, em função da medida da aresta a, do dodecaedro. Pelo Teorema de Pitágoras temos,

$$a^2 = m^2 + n^2 \,. \tag{4.3}$$

onde $n = \dfrac{l-a}{2}$.

Temos, também

$$m^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2. \tag{4.4}$$

Substituindo n por $\dfrac{l-a}{2}$ e isolando m^2 em (4.3), temos:

$$a^2 = m^2 + n^2 \Longrightarrow a^2 = m^2 + \left(\frac{l-a}{2}\right)^2 \Longrightarrow m^2 = a^2 - \left(\frac{l-a}{2}\right)^2.$$

Agora, substituindo o resultado em (4.4).

$$m^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \Longrightarrow h^2 = m^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Longrightarrow h^2 = \left(a^2 - \left(\frac{l-a}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{l^2 - 2al + a^2}{4}\right) - \left(\frac{l^2}{4}\right) = \frac{4a^2 - l^2 + 2al - a^2 - l^2}{4} = \frac{3a^2 - 2l^2 + 2al}{4}.$$

Substituindo (4.2) temos:

$$h^2 = \frac{3a^2 - 2(a\delta)^2 + 2a(a\delta)}{4} = \frac{3a^2 - 2a^2\delta^2 + 2a^2\delta}{4} = \frac{a^2}{4}(3 - 2\delta^2 + 2\delta) = \frac{a^2}{4}(3 - 2\delta(\delta - 1)).$$

E, usando (4.1) temos:

$$h^2 = \frac{a^2}{4}\left(3 - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\right)\right) = \frac{a}{4}\left(3 - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(3 - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(-1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \frac{a^2}{4}\left(3 - 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(3 - 2\left(\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2}{4}\right)\right) = \frac{a^2}{4}\left(3 - 2\left(\frac{5-1}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{a}{4}\left(3 - 2\left(\frac{4}{4}\right)\right) = \frac{a^2}{4}(3-2) = \frac{a^2}{4}.$$

Encontramos $h = \dfrac{a}{2}$.

Vamos agora calcular o volume do prisma triangular em que S_b é a área da base e $h_1 = a$ é a altura e, o volume de uma pirâmide de base retangular cuja base tem área $S_{(b_1)}$ e a altura é h.

Temos,

$$V_{Prisma} = S_b h_1 \Longrightarrow V_{Prisma} = \frac{lha}{2} \Longrightarrow V_{Prisma} = \frac{a\delta(\frac{a}{2})a}{2} \Longrightarrow V_{Prisma} = \frac{a^3\delta}{4}.$$

e
$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}S_{b_1}h$, onde $S_{b_1} = 2nl$. Então, $V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}(2nl)h$, como $2n = l - a$, temos:

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}(l-a)lh \Longrightarrow V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}(a\delta - a)(a\delta)\left(\frac{a}{2}\right) \Longrightarrow V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}(a(\delta-1))(a^2\delta)(\frac{1}{2}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow V_{Pirâmide} = \frac{1}{6}(a^3(\delta-1)\delta).$$

Como o dodecaedro foi decomposto em um cubo e seis sólidos como pode ser visto nas Figuras 4.3, 4.4 e 4.5. Então o volume V do dodecaedro é igual a, o volume do cubo, mais seis vezes o volume do sólido formado sobre cada uma de suas faces.

$$V = V_{cubo} + 6V_{Prisma} + 6V_{Pirâmide} \Longrightarrow V = (a\delta)^3 + 6\left(\frac{a^3}{4}\right))\delta + 6a^3\left(\frac{1}{6}\right)(\delta-1)\delta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow V = a^3\delta(\delta^2 + \frac{6}{4} + \delta - 1) \Longrightarrow V = a^3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{6}{4} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow V = a^3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) + \frac{2}{4} + \left(\frac{2+2\sqrt{5}}{4}\right)\right] \Longrightarrow$$

.

$$\Longrightarrow V = a^3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(\frac{10+4\sqrt{5}}{4}\right)\right] \Longrightarrow V = a^3\left(\frac{30+14\sqrt{5}}{8}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow V = 2a^3\left(\frac{15+7\sqrt{5}}{8}\right) \Longrightarrow V = a^3\left(\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\right).$$

Portanto,

$$V = \left(\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\right)a^3.$$

4.3 A Fórmula do Volume do Icosaedro

A dedução da fórmula para calcular o volume do icosaedro que faremos a seguir, foi baseada em uma demonstração voltada para alunos do ensino médio proposta em Granja e Costa [10].

Para deduzir a fórmula que permite calcular volume de um icosaedro de aresta l, consideremos que o mesmo seja constituído, por vinte tetraedros inscritos, porém não regulares, com um triângulo equilátero de lado l na base (uma face do icosaedro), conforme pode ser observado nas Figuras 4.9, 4.10 e 4.11.