CALCULAR O SEGUINTE LIMITE

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{2x}-1}{2^{5x}-1}$$

<u>Resolução</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{2x}-1}{2^{5x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{3^{2x}-1}{x}\right)}{\left(\frac{2^{5x}-1}{x}\right)} = \frac{\lim_{x\to 0} \frac{3^{2x}-1}{x}}{\lim_{x\to 0} \frac{2^{5x}-1}{x}} = \frac{m}{n}$$

Vamos desenvolver algebricamente o limite fundamental:

$$\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$$

$$\ln \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \ln e$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

Para $a > 1$, seja $a^x = 1 + y$. Então $y = a^x - 1$. Quando $y \to 0,\ x \to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{\ln a^x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x \ln a} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

Seja b tal que $b^k = a$. Então $a^x = b^{kx}$, que substituindo acima vem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{b^{kx}-1}{x} = \ln b^k$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{b^{kx}-1}{x} = k \ln b$$

Assim,

$$m = \lim_{x\to 0} \frac{3^{2x}-1}{x} = 2\ln 3,\ \ n = \lim_{x\to 0} \frac{2^{5x}-1}{x} = 5\ln 2$$

Portanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{2x}-1}{2^{5x}-1} = \frac{2\ln 3}{5\ln 2} = 0{,}4\ \log_2 3$$