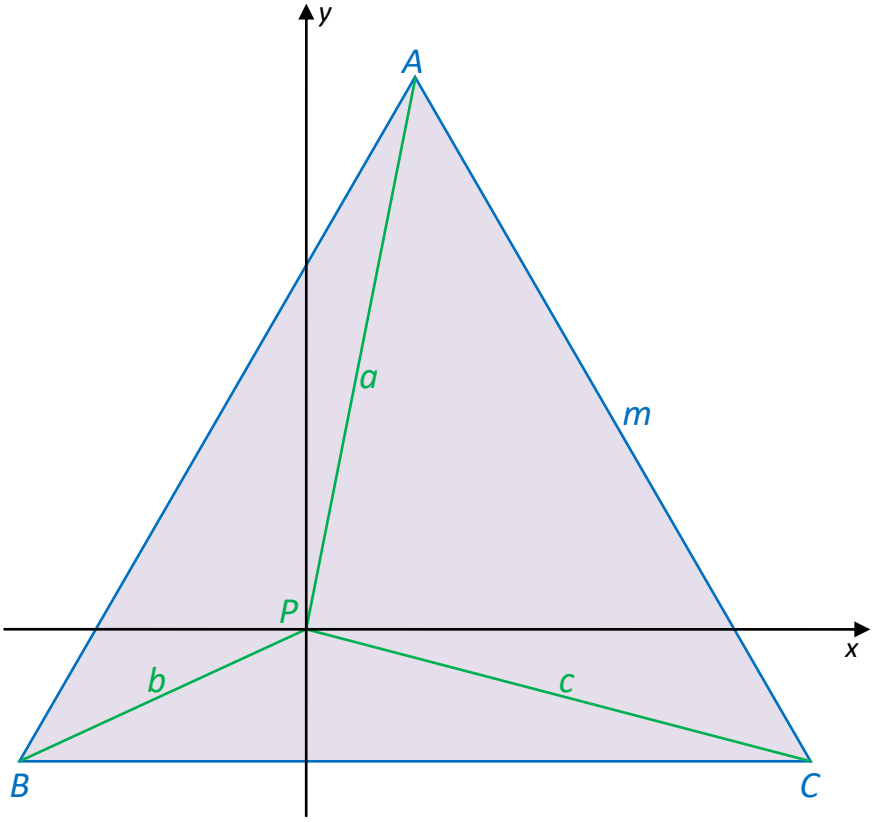
Seja P um ponto interior ao triângulo equilátero ABC, tal que:

$$PA = a, \qquad PB = b, \qquad PC = c$$

Determine a área de ABC em termos de a, b, c.



Seja $B = (r, s) \to C = (r + m, s),\ A = \left(\frac{2r+m}{2}, \frac{2s+m\sqrt{3}}{2}\right)$.

Assim, calculando os quadrados das distâncias, vem:

$$BP^2 = b^2 \to r^2 + s^2 = b^2 \to 12m^2r^2 + 12m^2s^2 = 12b^2m^2$$

$$CP^2 = c^2 \to (r + m)^2 + s^2 = c^2 \to r^2 + 2mr + m^2 + s^2 = c^2 \to$$

$$\to 2mr = c^2 - b^2 - m^2 \to 4m^2r^2 = (c^2 - b^2 - m^2)^2 \to$$

$$\to 12m^2r^2 = 3(c^2 - b^2 - m^2)^2$$

$$AP^2 = a^2 \rightarrow \left(\frac{2r+m}{2}\right)^2 + \left(\frac{2s+m\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow r^2 + mr + s^2 + ms\sqrt{3} + m^2 = a^2 \rightarrow ms\sqrt{3} = a^2 - (r^2 + s^2) - m^2 - mr \rightarrow$$

$$\rightarrow 3m^2s^2 = (a^2 - b^2 - m^2 - mr)^2 \rightarrow 12m^2s^2 = 4(a^2 - b^2 - m^2 - mr)^2$$

Somando membro a membro as duas últimas expressões e comparando com a primeira expressão, tem-se:

$$12m^2r^2 + 12m^2s^2 = 3(c^2 - b^2 - m^2)^2 + 4(a^2 - b^2 - m^2 - mr)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 12b^2m^2 = 3(c^2 - b^2 - m^2)^2 + (2a^2 - 2b^2 - 2m^2 - 2mr)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + m^4 = a^2b^2 + a^2c^2 + a^2m^2 + b^2c^2 + b^2m^2 + c^2m^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow m^4 - (a^2 + b^2 + c^2)m^2 + a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 0 \rightarrow$$

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4a^4 - 4b^4 - 4c^4 + 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}}{2}$$

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{3}\sqrt{4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2)^2}}{2}$$

Seja S a área do triângulo equilátero ABC. Portanto,

$$S = \frac{m^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow \boxed{S = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3} + 3\sqrt{4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2)^2}}{8}}$$

Testando, numericamente, para:

$$a = 8, \qquad b = 7, \qquad c = 6$$

$$S = \frac{149\sqrt{3} + 3\sqrt{4(3136 + 2304 + 1764) - 149^2}}{8}$$

$$S = \frac{149\sqrt{3} + 63\sqrt{15}}{8} \rightarrow S \cong 62{,}759\ u.a.$$