NOTAÇÕES

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3,...\}$
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3,...\}$
$\varnothing$: conjunto vazio
$A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$
det$A$: determinante da matriz A
A^{-1}: inversa da matriz A

i: unidade imaginária; $i^2 = -1$
$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
$\overline{z}$: conjugado do número complexo $z \in \mathbb{C}$
$|z|$: módulo do número complexo $z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Re} z$: parte real de $z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Im} z$: parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$
$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$

$\binom{a}{b}$: combinação de a elementos, b a b, onde a e b são inteiros maiores ou iguais a zero

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$\mathcal{P}(X)$: conjunto de todos os subconjuntos de X
$n(X)$: número de elementos do conjunto X (X finito)

Obs.: São cartesianos ortogonais os sistemas de coordenadas considerados

---

1. Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e, C e D, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto G. Se $EB = 5$, $BA = 7$, $EC = 4$, $GD = 3$ e $AG = 6$, então GF vale

A. ( ) 1
B. ( ) 2
C. ( ) 3
D. ( ) 4
E. ( ) 5

2. Seja U um conjunto não vazio com n elementos, $n \ge 1$. Seja S um subconjunto de $P(U)$ com a seguinte propriedade:

Se $A, B \in S$, então $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Então, o número máximo de elementos que S pode ter é:

A. ( ) 2^{n-1}
B. ( ) $n/2$, se n for par, e $(n + 1)/2$ se n for ímpar
C. ( ) $n + 1$
D. ( ) $2^n - 1$
E. ( ) $2^{n-1} + 1$

3. Sejam A e B subconjuntos finitos de um mesmo conjunto X, tais que $n(B\backslash A)$, $n(A\backslash B)$ e $n(A \cap B)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $r > 0$. Sabendo que $n(B\backslash A) = 4$ e $n(A \cup B) + r = 64$, então, $n(A\backslash B)$ é igual a

A. ( ) 12
B. ( ) 17
C. ( ) 20
D. ( ) 22
E. ( ) 24

4. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\sqrt{77}\cdot\text{sen}\left[5(x+\pi/6)\right]$ e seja B o conjunto dado por $B=\{x\in\mathbb{R}: f(x)=0\}$. Se m é o maior elemento de $B\cap(-\infty,0)$ e n é o menor elemento de $B\cap(0,+\infty)$, então $m+n$ é igual a

A. ( ) $2\pi/15$
B. ( ) $\pi/15$
C. ( ) $-\pi/30$
D. ( ) $-\pi/15$
E. ( ) $-2\pi/15$

5. Considere a equação $(a^x - a^{-x})/(a^x + a^{-x}) = m$, na variável real x, com $0 < a \neq 1$. O conjunto de todos os valores de m para os quais esta equação admite solução real é

A. ( ) $(-1, 0)\cup(0, 1)$
B. ( ) $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$
C. ( ) $(-1, 1)$
D. ( ) $(0, \infty)$
E. ( ) $(-\infty, +\infty)$

6. Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é

A. ( ) $4^4\cdot 30$
B. ( ) $4^3\cdot 60$
C. ( ) $5^3\cdot 60$
D. ( ) $\binom{7}{3}\cdot 4^3$
E. ( ) $\binom{10}{7}$

7. Considere as seguintes afirmações sobre a expressão $S=\sum_{k=0}^{101}\log_8(4^k\sqrt{2})$:

I. S é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita
II. S é a soma dos termos de uma progressão aritmética finita de razão 2/3
III. $S = 3451$
IV. $S\leq 3434+\log_8\sqrt{2}$

Então, pode-se afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

A. ( ) I e III
B. ( ) II e III
C. ( ) II e IV
D. ( ) II
E. ( ) III

8. Se para todo $z\in\mathbb{C}$, $|f(z)|=|z|$ e $|f(z)-f(1)|=|z-1|$, então, para todo $z\in\mathbb{C}$, $\overline{f(1)}f(z)+f(1)\overline{f(z)}$ é igual a

A. ( ) 1
B. ( ) $2z$
C. ( ) $2\,\text{Re}z$
D. ( ) $2\,\text{Im}z$
E. ( ) $2|z|^2$

9. O conjunto solução de $(\text{tg}^2x - 1)\cdot(1 - \text{cotg}^2x) = 4$, $x\neq k\pi/2$, $k\in\mathbb{Z}$, é

A. ( ) $\{\pi/3+k\pi/4,\ k\in\mathbb{Z}\}$
B. ( ) $\{\pi/4+k\pi/4,\ k\in\mathbb{Z}\}$
C. ( ) $\{\pi/6+k\pi/4,\ k\in\mathbb{Z}\}$
D. ( ) $\{\pi/8+k\pi/4,\ k\in\mathbb{Z}\}$
E. ( ) $\{\pi/12+k\pi/4,\ k\in\mathbb{Z}\}$

10. Se $\alpha \in [0, 2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z \neq 0$ e n é um número natural tal que $(z/|z|)^n = i\text{sen}(n\alpha)$, então, é verdade que

A. ( ) $2n\alpha$ é múltiplo de 2π
B. ( ) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de 2π
C. ( ) $n\alpha - \pi/4$ é múltiplo de $\pi/2$
D. ( ) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo não nulo de 2
E. ( ) $n\alpha - 2\pi$ é múltiplo de π

11. A condição para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases} \quad \text{é}$$

A. ( ) $a - b \neq 2$
B. ( ) $a + b = 10$
C. ( ) $4a - 6b = 0$
D. ( ) $a/b = 3/2$
E. ( ) $a \cdot b = 24$

12. Se $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do $\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a

A. ( ) 0
B. ( ) 4
C. ( ) 8
D. ( ) 12
E. ( ) 16

13. Seja p um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite $1 - i$ como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raízes de p são, respectivamente, 10 e – 40. Sendo afirmado que três raízes de p são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são

A. ( ) $3/2 - \sqrt{193}/6,\ 3,\ 3/2 + \sqrt{193}/6$
B. ( ) $2 - 4\sqrt{13},\ 2,\ 2 + 4\sqrt{13}$
C. ( ) –4, 2, 8
D. ( ) –2, 3, 8
E. ( ) –1, 2, 5

14. Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ podemos afirmar que

A. ( ) $x = 2$ não é raiz de p
B. ( ) p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais
C. ( ) p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira
D. ( ) p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras
E. ( ) p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais

15. Seja o sistema linear nas incógnitas x e y, com a e b reais, dado por

$$\begin{cases}(a-b)x-(a+b)y=1\\(a+b)x+(a-b)y=1\end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

I. O sistema é possível e indeterminado se $a = b = 0$
II. O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos
III. $x^2+y^2=\left(a^2+b^2\right)^{-1}$, $se\ a^2+b^2\neq 0$

Então pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas

A. ( ) I
B. ( ) II
C. ( ) III
D. ( ) I e II
E. ( ) II e III

16. Considere o polinômio $p(x)=x^3-(a+1)x+a,$ onde $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os valores de a, para os quais o polinômio $p(x)$ só admite raízes inteiras, é

A. ( ) $\{2n,\ n\in\mathbb{N}\}$
B. ( ) $\{4n^2,\ n\in\mathbb{N}\}$
C. ( ) $\{6n^2-4n,\ n\in\mathbb{N}\}$
D. ( ) $\{n(n+1),\ n\in\mathbb{N}\}$
E. ( ) $\mathbb{N}$

17. Numa circunferência C_1 de raio $r_1 = 3\ cm$ está inscrito um hexágono regular H_1; em H_1 está inscrita uma circunferência C_2; em C_2 está inscrito um hexágono regular H_2 e, assim, sucessivamente. Se A_n (em cm^2) é a área do hexágono H_n, então $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ (em cm^2) é igual a

A. ( ) $54\sqrt{2}$
B. ( ) $54\sqrt{3}$
C. ( ) $36\left(1+\sqrt{3}\right)$
D. ( ) $27/\left(2-\sqrt{3}\right)$
E. ( ) $30/\left(2+\sqrt{3}\right)$

18. Sejam a reta s: $12x - 5y + 7 = 0$ e a circunferência C: $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$. A reta p, que é perpendicular a s e é secante a C, corta o eixo Oy num ponto cuja ordenada pertence ao seguinte intervalo

A. ( ) $\left(-\frac{91}{12},-\frac{81}{12}\right)$
B. ( ) $\left(-\frac{81}{12},-\frac{74}{12}\right)$
C. ( ) $\left(-\frac{74}{12},-\frac{30}{12}\right)$
D. ( ) $\left(\frac{30}{12},\frac{74}{12}\right)$
E. ( ) $\left(\frac{75}{12},\frac{91}{12}\right)$

19. Os focos de uma elipse são F_1 (0, –6) e F_2 (0, 6). Os pontos A (0, 9) e B (x, 3), $x > 0$, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B, F_1 e F_2 é igual a

A. ( ) $22\sqrt{10}$
B. ( ) $18\sqrt{10}$
C. ( ) $15\sqrt{10}$
D. ( ) $12\sqrt{10}$
E. ( ) $6\sqrt{10}$

20. Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais desta pirâmide formam diedros de 60º com o plano da base. A área total da pirâmide, em cm^2, é

A. ( ) $81\sqrt{3}/2$
B. ( ) $81\sqrt{2}/2$
C. ( ) $81/2$
D. ( ) $27\sqrt{3}$
E. ( ) $27\sqrt{2}$

AS QUESTÕES DE 21 A 30 DEVERÃO SER RESOLVIDAS NO CADERNO DE RESPOSTAS ANEXO.

21. Considere A um conjunto não vazio com um número finito de elementos. Dizemos que $\mathcal{F} = \{A_1, ..., A_m\} \subset \mathcal{P}(A)$ é uma **partição de *A*** se as seguintes condições são satisfeitas:

I. $A_i \neq \varnothing,\ i = 1, ..., m$

II. $A_i \cap A_j = \varnothing,$ se $i \neq j,$ para $i, j = 1, ..., m$

III. $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$

Dizemos ainda que $\mathcal{F}$ é uma partição **de ordem** k se $n(A_i) = k,\ i = 1, \ldots, m.$

Supondo que $n(A) = 8$, determine:

(a) As ordens possíveis para uma partição de A

(b) O número de partições de A que têm ordem 2

22. Seja $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \le x < 1 \end{cases}$.

Seja $g : (-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} f(x + 1/2), & -1/2 < x < 0 \\ 1 - f(x + 1/2), & 0 \le x < 1/2 \end{cases}$, com f definida acima.

Justificando a resposta, determine se g é par, ímpar ou nem par nem ímpar.

23. Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^9$.

24. Determine para quais valores de $x \in (-\pi/2,\ \pi/2)$ vale a desigualdade

$$\log_{\cos x}(4\operatorname{sen}^2 x - 1) - \log_{\cos x}(4 - \sec^2 x) > 2.$$

25. Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1,$ com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é verdadeira:

"Se uma das raízes de $p(x)$ é racional, então todas as suas raízes são racionais."

26. As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m^2.

27. Sejam as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine o elemento c_{34} da matriz $C=(A+B)^{-1}$.

28. Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva r, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é 16/13, determine o valor de $a + r$.

29. Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

30. Considere um losango *ABCD* cujo perímetro mede 100 *cm* e cuja maior diagonal mede 40 *cm*. Calcule a área, em cm^2, do círculo inscrito neste losango.